PAU MURCIA

MATEMÁTICAS II

INTEGRALES

1) Septiembre 2012

De todas las primitivas de la función $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0, 1)$.

---

2) Septiembre 2012

CUESTIÓN B.4: [2,5 puntos] Calcule el área comprendida entre la curva

$$y = \frac{3}{6+2x^2},$$

el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

---

3) Junio 2012

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 9$.

---

4) Junio 2012

CUESTIÓN B.4:

a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 1$.

---

5) Septiembre 2011

CUESTIÓN A.4:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx$. **[1.5 puntos]**

b) Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx$. **[1 punto]**

6) Septiembre 2011

CUESTIÓN B.4:

a) Calcule la integral indefinida $\int x^2 e^x dx$. **[1.5 puntos]**

b) Evalúe la integral definida $\int_0^1 x^2 e^x dx$. **[1 punto]**

7) Junio 2011

CUESTIÓN A.4:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución). **[1 punto]**

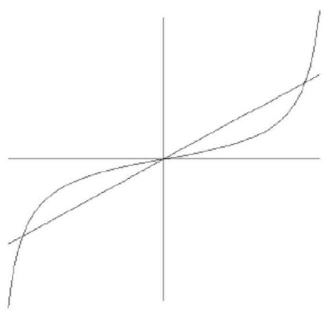
b) Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, utilizando el método de integración por partes. **[1.5 puntos]**

8) Junio 2011

CUESTIÓN B.4:

a) Dada la función $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ definida para los valores $-1 < x < 1$, determine los puntos de corte de la recta $y = 4x$ con la gráfica de f. **[0.75 puntos]**

b) Calcule el área del recinto limitado por la recta $y = 4x$ y la gráfica de f. **[1.75 puntos]**



9) Septiembre 2010

CUESTIÓN A.4: Enunciar el teorema fundamental del cálculo integral y calcular la integral siguiente:

$$\int \frac{x^2}{x^2-9}dx.$$ **[2.5 puntos]**

---

10) Septiembre 2010

CUESTIÓN B.4: Calcular el área de la región delimitada por el eje x y la función $f(x)=x-\sqrt{x}$. **[2.5 puntos]**

---

11) Junio 2010

CUESTIÓN A.4: Calcular el área encerrada por las curvas $f(x)=x^3+x^2+2x+1$ y $g(x)=4x^2+1$. **[2.5 puntos]**

---

12) Junio 2010

CUESTIÓN B.4: Calcular la integral siguiente: $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$. **[2.5 puntos]**

---

13) Septiembre 2009

CUESTIÓN 4.A.

i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo. **[0.5 puntos]**

ii) Calcular la integral $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$. **[2 puntos]**

---

14) Septiembre 2009

CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3-2x^2+2x$. **[2.5 puntos]**

---

15) Junio 2009

CUESTIÓN 4.A.

i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo. **[0.5 puntos]**

ii) Calcular la integral $\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}dx$ **[2 puntos]**

---

16) Junio 2009

CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función f(x)=xln(x) para $1 \le x \le 2$, la recta x=2 y el eje x. **[2.5 puntos]**

17) Septiembre 2008

CUESTIÓN 4.A. Calcular la integral $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$. **[2.5 puntos]**

18) Septiembre 2008

CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por las funciones $f(x)=x^3+x^2+1$ y $g(x)=2x+1$. **[2.5 puntos]**

19) Junio 2008

CUESTIÓN 4.A.

i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo. **[0.5 puntos]**

ii) Calcular la integral $\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}dx$. **[2 puntos]**

20) Junio 2008

CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por las funciones f(x)=1+ln(x) y g(x)=1/x y las rectas x=1 y x=2. **[2.5 puntos]**

21) Septiembre 2007

CUESTIÓN 4.A. Calcular la integral: $\int_0^1 \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx$ **[2.5 puntos]**

22) Septiembre 2007

CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por el eje x y la función f(x)=xcosx entre $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$. **[2.5 puntos]**

23) Junio 2007

CUESTIÓN 4.A.

i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo. **[0.5 puntos]**

ii) Calcular la derivada de la función $f(x)=\int_0^x \cos(t^2)dt$ **[0.5 puntos]**

iii) Calcular la integral $\int_1^e \ln(x^2)dx$ **[1.5 puntos]**

---

24) Junio 2007

CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por la función $f(x)=(x^3-1)/(x^2+1)$ y los ejes x e y. **[2.5 puntos]**

---

25) Septiembre 2006

CUESTIÓN 4.A. Calcule la siguiente integral. [**2.5 puntos**]

$$I=\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}dx$$

---

26) Septiembre 2006

CUESTIÓN 4.B. Calcule el área de la región determinada por las curvas $y=x^2$ e $y=x^{1/2}$. [**2.5 puntos**]

---

27) Junio 2006

CUESTIÓN 4.A.

i) Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo. [**0.5 puntos**]

ii) Calcule la integral siguiente. [**2 puntos**]

$$I=\int_0^1 (x^2-1)e^{-2x}dx$$

---

28) Junio 2006

CUESTIÓN 4.B. Calcule el área determinada por la función $f(x)=x^2/(x^2+4x+3)$ y las rectas $y=0, x=0$ y $x=3$. [**2.5 puntos**]

---

29) Septiembre 2005

CUESTIÓN 1.

Encontrar el área del recinto determinado por las curvas $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$. **[2.5 PUNTOS]**

---

30) Septiembre 2005

CUESTIÓN 2.

1. Justificar geométricamente que si f y g son funciones positivas en el intervalo $[a,b]$ y si para todo x en dicho intervalo, $f(x) \le g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. **[1 PUNTO]**
2. Demostrar que $\dfrac{1}{2} \le \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^4}$. **[1.5 PUNTOS]**

---

31) Junio 2005

1. Se consideran, en el plano, las curvas de ecuaciones $y = -\dfrac{x^2}{4} + x$ e $y = \dfrac{x^2}{4} - x$. Dibujar estas curvas. **[0,5 PUNTOS]**
2. Encontrar el área del recinto determinado por dichas curvas. **[2 PUNTOS]**

---

32) Junio 2005

CUESTIÓN 2.

Calcular el valor de la integral: $I = \int_0^1 xe^x dx$

---

33) Septiembre 2004

CUESTIÓN 1.

Encontrar el área determinada por las curvas $y = |x|$ e $y = x^3$.

---

34) Septiembre 2004

CUESTIÓN 2.

Calcular la integral

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}dx.$$

[2 PUNTOS]

¿Qué representa geométricamente el valor de dicha integral? **[0,5 PUNTOS]**

---

35) Junio 2004

CUESTIÓN 1.

Contestar, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$ **[0,5 PUNTOS]**

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$ **[0,5 PUNTOS]**

c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $a = b$. **[0,5 PUNTOS]**

d) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x, entonces $a = b$. **[0,5 PUNTOS]**

e) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$ **[0,5 PUNTOS]**

---

36) Junio 2004

CUESTIÓN 2.

Calcular el área determinada por la curva $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

---

37) Septiembre 2003

CUESTIÓN 1.

Encuentre el área del recinto determinado por las curvas $y = |x|$ e $y = 2 - x^2$.

---

38) Septiembre 2003

CUESTIÓN 2.

Calcule:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

---

39) Junio 2003

CUESTIÓN 1.

(a) Enuncie la Regla de Barrow. **[0.5 PUNTOS]**

(b) Calcule $\int \frac{dx}{x^2-4}$. **[1 PUNTO]**

(c) Encuentre el área de la región del plano determinada por la curva $y = \frac{1}{x^2-4}$ y las rectas $x = 1$, $x = -1$ e $y = -5$. **[1 PUNTO]**

---

40) Junio 2003

CUESTIÓN 2.

(a) Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. **[0.5 PUNTOS]**

(b) Calcule $\int ln(x^2)\,dx$. **[1 PUNTO]**

(c) Encuentre el valor del área determinada por la curva $y = ln(x^2)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 9$ y $x = 12$. **[1 PUNTO]**

---

41) Septiembre 2002

CUESTIÓN 1.

a) Utilizando el método de integración por partes, calcule $I = \int \ln(x)dx$. **[1.5 PUNTOS]**

b) Calcule el área determinada por la curva $y = \ln(x)$, el eje OX y la recta $x = e$. **[1 PUNTO]**

---

42) Septiembre 2002

CUESTIÓN 2.

Calcule el área determinada por la curva $y = \frac{1}{1-x^2}$, el eje OX y las rectas $x = 1/2$ y $x = -1/2$.

---

43) Junio 2002

CUESTIÓN 1.

a) Enuncie la Regla de Barrow. **[0.5 PUNTOS]**

b) Calcule el área determinada por la curva $y = tg(x)$, el eje OX y la recta $x = \frac{\pi}{3}$. **[2 PUNTOS]**

---

44) Junio 2002

CUESTIÓN 2.

a) Mediante argumentos geométricos, demuestre que si f y g son funciones positivas en el intervalo $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo x de dicho intervalo, entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

[0.5 PUNTOS]

b) Sin hacer ningún cálculo, justifique cuál de las siguientes integrales es mayor:

$$\int_0^1 x^2 sen^2 x dx \qquad \int_0^1 x sen^2 x dx$$

[2 PUNTOS]

---

45) Septiembre 2001

CUESTIÓN 1.

a) Justifique geométricamente que si f es una función positiva definida en el intervalo $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces se cumple:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$ **[0.5 PUNTOS]**

b)Justifique geométricamente que si f y g son funciones definidas en $[a,b]$ y para todo $x \in [a,b]$ se cumple que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ entonces

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$ **[0.5 PUNTOS]**

c) Demuestre que: $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx \leq 1.$ **[1.5 PUNTOS]**

---

46) Septiembre 2001

CUESTIÓN 2.

a) Enuncie la Regla de Barrow. **[0.5 PUNTOS]**

b) Calcule el área del recinto determinado por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ y el eje de abscisas. **[2 PUNTOS]**

---

47) Junio 2001

CUESTIÓN 1.

Encuentre el área del recinto determinado por las curvas:

$$y = |x-2| \qquad y = -x^2 + 4x - 2.$$

---

48) Junio 2001

CUESTIÓN 2.

a) Si p y q son enteros positivos, demuestre que:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \int_0^1 x^q(1-x)^p\,dx$$

[1.5 PUNTOS]

b) Calcule $\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx$. **[1 PUNTO]**

---

49) Septiembre 2000

CUESTIÓN 1: a) Justifique con argumentos geométricos que si f y g son funciones continuas y positivas en [a,b] y $f(x) \leq g(x)$ para todo x de dicho intervalo, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$. **(0.5 P)**

b) Demuestre que si m es un número cualquiera mayor que 1 y k un número natural cualquiera, se cumple que: $\int_1^m \frac{x^k+1}{x^{k+1}+1}\,dx < m$. **(2 P)**

---

50) Septiembre 2000

CUESTIÓN 2: Encuentre el área de la región determinada por la curva $y = \frac{x^2}{4-x^2}$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

---

51) Junio 2000

CUESTIÓN 1: Si f y g son funciones continuas y positivas en el intervalo [a,b], justifique, mediante argumentos geométricos, si las siguientes afirmaciones son ciertas.

i) $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. **(0.5 P)**

ii) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. **(0.75 P)**

iii) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$. **(0.75 P)**

iv) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad c \in (a,b)$. **(0.5 P)**

Si alguna es falsa, ponga un contraejemplo.

---

52) Junio 2000

CUESTIÓN 2: a) Enuncie la Regla de Barrow. **(0.5 P)**

b) Determine el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ y la recta que pasa por los puntos (2,4) y (4,2). **(2 P)**

---

53) Septiembre 1999

CUESTIÓN 1: a) Enuncie el teorema conocido como "Regla de Barrow". **(0.5 P)**

b) Halle el área encerrada entre las curvas:

$$y = |x^2 - 1| \quad \text{e} \quad y = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ |x+1| & si \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2 P)}$$

---

54) Septiembre 1999

CUESTIÓN 2: a) Se consideran las integrales: $I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ e $I_2 = \int \cos^2 x \, dx$. Utilizando la identidad trigonométrica $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, calcule $I_1 + I_2$, $I_1 - I_2$, I_1 e I_2. **(1 P)**

b) Calcule $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$. (Indicación: haga el cambio $x = a \operatorname{sen} t$). **(1 P)**

c) Encuentre el área de la elipse de ecuación: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. **(0.5 P)**

---

55) Junio 1999

CUESTIÓN 1: a) Enuncie la Regla de Barrow. **(0.75 P)**

b) Calcule el valor del área determinada por la curva de ecuación: $y = \frac{x-1}{x^2-4}$, el eje OX y las rectas x = 3 y x = 4. **(1.75 P)**

---

56) Junio 1999

CUESTIÓN 2: a) Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo. **(0.75 P)**

b) Encuentre los valores de las constantes a, b, c y d, sabiendo que:

$$\int_0^x (t^3 - t + 1) e^t dt = (ax^3 + bx^2 + cx + d) e^x$$

Justifique la respuesta. **(1.75 P)**

---

57) Septiembre 1998

1. Encontrar el área determinada por la curva y = Ln(x), la recta x = e^2 y la tangente a dicha curva en el punto de abscisa x = 1.

---

58) Septiembre 1998

2. Se considera la curva de ecuación $y^2 = x^3$:

i) ¿Dónde está definida la curva?.

ii) Si el punto (a, b) pertenece a la curva, ¿qué le sucede al (a, -b)?. Como consecuencia, ¿qué tipo de simetría tiene la curva?.

iii) ¿Cuánto ha de valer $a > 0$, para que el área determinada por la curva y la recta $x = a$ sea $\frac{4^6}{5}$?.